MATEMATICKÁ ANALÝZA A4 - CVIČENÍ

WIKI SKRIPTUM FJFI 29. ÚNORA 2020

1. Kvadriky

Definice 1.1. (Kvadratická funkce) Buďte $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická, $A \neq \Theta$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Pak zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax - 2b^{\mathrm{T}}x + c$$

se nazývá kvadratická funkce. Množina $\mathcal{Q} = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ se nazývá kvadrika s rovnicí $f(x) = 0$.

Poznámka 1.1. V této definici jsme použili značení standardního skalárního součinu pomocí sloupcových a řádkových vektorů. Zřejmě platí

$$x^{\mathrm{T}}Ax = (x, Ax)$$

$$b^{\mathrm{T}}x = (b, x)$$

Tohoto zápisu budeme zhusta používat.

Definice 1.2. (Souřadná soustava) Nechť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$. Pak dvojici $(\mathcal{X}, s)$ nazýváme soustavou souřadnic s bází $\mathcal{X}$ a počátkem s.

Poznámka 1.2. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$

$$x = s + \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

když $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a souřadnice $y = (y_1, \dots, y_n)$. Pomocí matice přechodu $\mathbb{P}$ zapíšeme výše uvedený vztah jako $x = s + \mathbb{P}y$

Poznámka 1.3. V následujícím textu se tedy budeme snažit zjednodušit výraz pro $f(x)$ přechodem k jiné soustavě souřadné.

Máme tedy

$$f(x) = f(s + \sum_{i=1}^{n} y_i x_i) = f(s + \mathbb{P}y) = (s + \mathbb{P}y)^{\mathrm{T}}\mathbb{A}(s + \mathbb{P}y) - 2b^{\mathrm{T}}(s + \mathbb{P}y) + c =$$

$$= s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}s + s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}\mathbb{P}y + (\mathbb{P}y)^{\mathrm{T}}\mathbb{A}s + (\mathbb{P}y)^{\mathrm{T}}\mathbb{A}\mathbb{P}y - 2b^{\mathrm{T}}s - 2b^{\mathrm{T}}\mathbb{P}y + c =$$
$$= y^{\mathrm{T}}\mathbb{P}^{\mathrm{T}}\mathbb{A}\mathbb{P}y + 2(s^{\mathrm{T}}\mathbb{A} - b^{\mathrm{T}})\mathbb{P}y + s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}s - 2b^{\mathrm{T}}s + c = f_1(y)$$

Odvození je správné, protože členy $s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}\mathbb{P}y$ a $(\mathbb{P}y)^{\mathrm{T}}\mathbb{A}s$ se rovnají. (Jsou to vůči sobě transponovaná reálná čísla.) $f_1(y)$ je opět kvadratickou funkcí. Z odvozeného zápisu vyplývá několik zajímavých možností:

- Určitou záměnou můžeme zrušit konstantu (pokud $f(s) = 0$).
- Pro eliminaci lineárního členu je zapotřebí, aby $s^{\mathrm{T}}\mathbb{A} - b^{\mathrm{T}} = \Theta$.

Pokud $\mathbb{A}$ je symetrická pak existuje $\mathbb{P}$ tak, že $\mathbb{P}^{\mathrm{T}}\mathbb{A}\mathbb{P}$ je diagonální a tedy

$$y^{\mathrm{T}}\mathbb{P}^{\mathrm{T}}\mathbb{A}\mathbb{P}y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

A tedy existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $s^{\mathrm{T}}\mathbb{A} - b^{\mathrm{T}} = \Theta$. Dosáhneme toho, že lineární člen vypadne, tj. $\mathbb{A}s = b$.

Definice 1.3. (Střed kvadriky) Bod $s \in \mathbb{R}^n$ se nazývá středem kvadriky $\mathcal{Q}$ právě když $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(f(s + x) = f(s - x))$. Existuje-li alespoň jeden střed kvadratické funkce, pak se kvadrika nazývá centrální. Neexistuje-li, nazýváme ji necentrální. Označíme S_f množinu všech středů f.

Věta 1.1. Platí následující tvrzení:

(i) $\mathcal{Q} = f^{-1}(0)$ je centrální právě tehdy, když existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbb{A}s = b$.
(ii) $S_f = \{s \in \mathbb{R}^n | \mathbb{A}s = b\}$ je varieta.
(iii) $f|_{S_f} = const.$ (tzv. centrální hodnota)

Důkaz: ad (i) a (ii):

$$f(s \pm x) = s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}s \pm 2s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x + x^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x - 2b^{\mathrm{T}} \mp 2b^{\mathrm{T}}x + c =$$

$$= x^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x \pm 2(s^{\mathrm{T}}\mathbb{A} - b^{\mathrm{T}})x + f(s)$$

Nyní vidíme, že tvrzení č. 1 a 2 věty platí.

$$\text{ad(iii): Nechť} s_1, s_2 \in S = f, s_2 = x + s_1, x \neq 0$$

$$f(s_2) = f(s_1) = x^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x + 2(\mathbb{A}s_1 - b)^{\mathrm{T}}x + f(s_1) = f(s_1)$$

První člen je nula, protože $\mathbb{A}x = \mathbb{A}(s_2 - s_1) = \mathbb{A}(s_2) - \mathbb{A}(s_1) = 0$, druhý člen je nula, protože $s_1 \in S_f$

Závěr: Pro centrální kvadriky existuje souřadný systém $(\mathcal{X}, s)$ tak, že (je-li y zápis souřadnic bodu x v systému $(\mathcal{X}, s)$):

$$f(x) = f_1(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + f_0, f_0 = f(s).$$

Poznámka 1.4. Některé zápisy

- Nechť f je centrální, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $k = \mathrm{h}(\mathbb{A}) \leq n$, $s \in S_f$, $\mathcal{X}$ je diagonální báze taková, že

  $$(\forall j \in \hat{k})(\lambda_j \neq 0)(\forall j = k+1 \ldots, n)(\lambda_j = 0).$$

  Pak se $(\mathcal{X}, s)$ nazývá tzv. Kanonickou soustavou souřadnic. f má v této soustavě tvar

  $$f(x) = f_1(y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 + f_0.$$

- Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$, $p \geq k$ a $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_k < 0$. Potom podle hodnoty f_0 můžeme standardní tvar kvadriky $\mathcal{Q} = f^{-1}(0)$ zapsat následujícími způsoby
  (1) Pokud $f_0 = 0$ pak

  $$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{k} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 = 0,$$

  kde

  $$\lambda_i = \frac{1}{\alpha_i^2}, \qquad i \in \hat{p},$$
  $$\lambda_i = -\frac{1}{\alpha_i^2}, \qquad i = p+1, \ldots, k.$$

  (2) Pokud $f_0 \neq 0$ pak

  $$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{k} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 = 1,$$

  kde

  $$\frac{1}{\alpha_i^2} = \pm\frac{1}{|f_0|}|\lambda_i|, i \in \hat{k}.$$

Definice 1.4. Reálné osy mají indexy $i \in \hat{p}$, imaginární osy $i \in \{p+1, \ldots, k\}$. Hodnost $\mathbb{A}$ je rovna n, právě když je to regulární kvadrika.

1.1. **Necentrální kvadriky.**

Poznámka 1.5. Nyní nelze odstranit lineární člen (rovnice $\mathbb{A}s = b$ nemá řešení). Zkusíme tedy najít s tak, aby $f(s) = 0$.

Poznámka 1.6. Jestliže matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická pak $\ker \mathbb{A} \oplus \operatorname{Im} \mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ [1].

Věta 1.2. Nechť f je necentrální, $b = b_1 + b_2$, kde $b_1 \in \operatorname{Im} \mathbb{A}$ a $b_2 \in \ker \mathbb{A}$. Pak existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbb{A}s = b_1$.

Definice 1.5. (Vrchol) Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ takový, že $f(s) = 0$ se nazývá vrchol f. Množina vrcholů se označuje V_f.

Poznámka 1.7. (Kanonický tvar) Pokud $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná pomocí báze $\mathcal{X}$ (kanonická báze), $\mathrm{h}(\mathbb{A}) = k$, $s \in V_f$ a označíme-li souřadnice v $(\mathcal{X}, s)$ y, kde

$$x_{k+1} = \frac{1}{\|b_2\|} b_2,$$

pak kanonický tvar $\mathbb{A}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i)^2 - 2\|b_2\| y_{k+1} = \mathcal{Q}.$$

Poznámka 1.8. (Standardní tvar)

1.2. **Kvadriky v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ - kuželosečky.**

Následují příklady některých často se vyskytujících kvadrik, tyto naleznete v Tabulce č. 1.2.

Rovnice kvadriky	Označení
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elipsa
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	bod
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvě přímky
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	dvě přímky
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} = 0$	přímka
$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	parabola

Tabulka 1. Kvadriky v R^2

Dále uvedeme některé kvadriky v R^3, v této tabulce nechť $a, b, c > 0$. Ty jsou v Tabulce č. 2.

1.3. **Kvadriky v $\mathbb{R}^3$.**

1.4. **Příklady.**

V následujícím textu se budeme zabývat kvadrikami v $\mathbb{R}^2$.

Příklad 1.1. *Máme kvadriku o rovnici*

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

[1] Zde $\ker \mathbb{A} = \mathbb{A}^{-1}(\Theta)$ a $\operatorname{Im} \mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$.

Rovnice kvadriky	Označení
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	elipsoid
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	jednodílný hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	dvoudílný hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	střed (bod)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	kužel
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	eliptický válec
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	hyperbolický válec
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	přímka
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	dvojice rovin
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	eliptický paraboloid
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	hyperbolický paraboloid
$\frac{x^2}{a^2}=1$	dvojice rovin
$\frac{x^2}{a^2}=-1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2}=0$	rovina
$\frac{x^2}{a^2}=2y$	parabolický válec

Tabulka 2. Kvadriky v R^3

Porovnáním s obecným tvare v $\mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x,y)\mathbb{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-2b^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+c$$

dostaneme

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\2 & 8\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}16\\28\end{pmatrix},\ c=80.$$

Matice $\mathbb{A}$ je regulární a proto existuje právě jedno s tak, že $\mathbb{A}s=b$. Řešme proto

$$s$$

Příklad 1.2. *Máme kvadriku o rovnici*

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0.$$

Příklad 1.3. *Máme kvadriku o rovnici*

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+2y+2z-2=0.$$

2. Implicitní funkce

Věta 2.1. (O inverzi) Buďte splněny tyto předpoklady

(i) $g : E \to E$, spojité na okolí $y_0 \in E$,
(ii) existuje g' na okolí y_0 spojitá v y_0,
(iii) $g'(x_0)$ je regulární,
(iv) $g(y_0) = x_0$.

Potom existuje H_{x_0} a H_{y_0} tak, že $(\forall x \in H_{x_0})(\exists_1 y \in H_{y_0})(x = g(y))$. Tj. na H_{x_0} existuje g^{-1} a platí, že $(g^{-1})'(x_0) = (g'(y_0))^{-1}$.

Věta 2.2. (O implicitních funkcích) Nechť $\Phi : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$ a

(i) $\exists (x_0, y_0)$: $\Phi(x_0, y_0) = \Theta$,
(ii) Φ je spojité na okolí (x_0, y_0),
(iii) $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ existuje na okolí (x_0, y_0) a je spojitá v (x_0, y_0),
(iv) $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$ je regulární.

Pak
$$(\exists H_{x_0},\ H_{y_0})(\forall x \in H_{x_0})(\exists_1 y \in H_{y_0})(\Phi()x, y) = \Theta.$$
Vzniknuvší funkce (označme ji $Y = Y(x)$) je spojitá na H_{x_0}. Pokud Φ' existuje na okolí (x_0, y_0) pak i Y' existuje na H_{x_0}.

Příklad 2.1. *Mějme zadanou množinu bodů splňujících vztah $x + y + z = e^z$, kde $x + y > 1$ a $z > 0$. Ptáme se, zda existuje závislost $z = z(x, y)$.*

Příklad 2.2. *Máme zadáno $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ po složkách takto:*
$$\Phi^1(x, y, u, v) = x + y^2 + u^3 - u - v = 0,$$
$$\Phi^2(x, y, u, v) = x^2 - 3y + u - 2v + 4 = 0.$$
Existují závislosti $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$?

Příklad 2.3. *Je zadán vztah $y - \epsilon \sin y = x$, kde $\epsilon \in (0, 1)$. Existuje závislost $y = y(x)$?*

Poznámka 2.1. Věta o inverzi zaručuje lokální invertovatelnost. Nic víc.

Příklad 2.4. *Je zadána $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vztahem*
$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$
kde $x, y > 0$. Existuje F^{-1}?

2.1. **Extrémy implicitně zadaných funkcí.**

V následujících příkladech využijeme vědomostí nabytých o implicitních funkcích jakožto i minulého semestru.

Příklad 2.5. *(*Děmidovič 3651.*) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem*
$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Příklad 2.6. *(*Děmidovič 3652.*) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem*
$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Příklad 2.7. *(*Děmidovič 3653.*) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem*
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

3. Extrémy na varietách

Poznámka 3.1. Uvědomme si, že

- **Volný extrém** funkce $f : D_f \to \mathbb{R}$ jsme hledali na otevřeném $D_f \subset \mathbb{R}^n$
- **Vázaný extrém** funkce $f : D_f \to R$ hledáme na $D_f \subset \mathbb{R}^n$, který je varietou v $\mathbb{R}^n$.

Definice 3.1. (Vázaný extrém) Úloha nalézt vázaný extrém funkce $f : M \to \mathbb{R}$ na varietě $M \subset \mathbb{R}^n$ znamená nalézt body z M tak, že funkce f v nich má lokální extrém vzhledem k množine M.

Poznámka 3.2. (Zadání variety) Varietu M zadáme pomocí zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$ následovně

$$M \equiv \Phi(x) = 0.$$

Dále pokud $\mathcal{J}\Phi$ je Jakobián zobrazení Φ, určíme dimenzi variety jako

$$\dim M = n - \mathrm{h}(\mathcal{J}\Phi).$$

Definice 3.2. (Tečný prostor) Tečným prostorem k varietě M v bodě $x_0 \in M$ rozumíme

$$T_M(x_0) = \left[\mathcal{J}\Phi(x_0)\right]^{-1}(\Theta) = \ker(\mathcal{J}\Phi(x_0)).$$

Definice 3.3. (Lagrangova funkce) Lagrangeova funkce $\Lambda : (\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ je definována vztahem

$$\Lambda(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi^j(x),$$

kde $\Phi^{\mathrm{T}}(x) = \left(\Phi^1(x), \Phi^2(x), \dots, \Phi^m(x)\right)$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory.

Věta 3.1. (Nutná podmínka) Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in M$ lokální extrém vzhledem k varietě M. Pak

(i) $\exists f'(x_0) \;\Rightarrow\; (\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R})(x_0$ je stacionárním bodem funkce $\Lambda)$,
(ii) $M, f \in C^{(2)} \;\Rightarrow\; \Lambda''(x_0)\Big|_{T_M(x_0)}$ je semidefinitní.

Věta 3.2. (Postačující podmínka) Nechť $x_0 \in M$, $M, f \in C^{(2)}$ a existují $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ tak, že

(i) $\Lambda''(x_0) = \Theta$,
(ii) $\Lambda''(x_0)\Big|_{T_M(x_0)}$ je PD, resp. ND.

Pak má f v bodě x_0 ostré lokální minimum, resp. maximum, vzhledem k varietě M.

Následující příklady byly spočteny na cvičeních, některé jsou z Děmidoviče.

Příklad 3.1. *Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na varietě $M \equiv x + y = 1$.*

Příklad 3.2. *Nalezněte extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na varietě*

$$\begin{aligned} M \equiv & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ & x + y + z = 0 \end{aligned}$$

Příklad 3.3. *Nalezněte extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ na varietě*

$$\begin{aligned} M \equiv & x^2 + y^2 = 2 \\ & y + z = 2 \end{aligned}$$

Příklad 3.4. *Nalezněte extrémy funkce*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

na varietě

$$M \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i = A > 0,$$

při $(x_i > 0)(\forall i \in \hat{n})$ a $p > 1$.

Příklad 3.5. *Nalezněte extrémy funkce*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

kde $(\alpha_i, x_i > 0)(\forall i \in \hat{n})$ *na varietě*

$$M \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i = A > 0.$$

3.1. **Extrémy na kompaktech.**

Poznámka 3.3. Funkce spojitá na kompaktu má globální maximum i minimum.

Příklad 3.6. *Mějme funkci* $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ *a hledejme její extrémy vzhledem k varietě* $M \equiv |x| + |y| \geq 1$.

Příklad 3.7. *Hledejte extrémy funkce*

$$f(x, y, z) = 2x^2 + +2y^2 + z^2 - x - y - z - 2xy + 1,$$

na varietě

$$M \equiv < 0, 1 > \times < 0, 1 > \times < 0, 1 > .$$

3.2. **Příklady - Děmidovič.** Následující příklady jsou z Děmidoviče [**?**], konkrétně od 3654 až po 3677 na stranách 339 až 341. Zde je uvádím v plném znění i s výsledky.

Najděte extrémy následujících funkcí více proměnných

P. 3.1. 3654. $z = xy$, když $x + y = 1$.

$$[\ z_{max} = 1/4,\ x = 1/2,\ y = 1/2\ ]$$

P. 3.2. 3655. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, když $x^2 + y^2 = 1$.

$$[\ z_{min} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}, x_{min} = -\frac{b\epsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_{min} = -\frac{a\epsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}; z_{max} = -z_{min}, x_{max} = -x_{min}, y_{max} = -y_{min}\ ]$$

P. 3.3. 3656. $z = x^2 + y^2$, když $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$$[\ z_{max} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2},\ x = \frac{ab^2}{a^2+b^2},\ y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}\ ]$$

P. 3.4. 3657. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, když $x^2 + y^2 = 1$.

$$[\ z_{min} = \lambda_1,\ z_{max} = \lambda_2,\ \text{kde } \lambda_1 < \lambda_2 \text{ a platí } (A - \lambda_{12})(C - \lambda_{12}) - B^2 = 0\ ]$$

P. 3.5. 3657.1. $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, když $4x^2 + y^2 = 25$.

$$[\ z_{max} = 106\tfrac{1}{4},\ x = \pm 1\tfrac{1}{2},\ y = \pm 4;\ z_{min} = -50,\ x = \pm 2,\ y = \mp 3\ ]$$

P. 3.6. 3658. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, když $x - y = \frac{\pi}{4}$.

$$[\ \text{Extrém v } z = 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}},\ x = \pi/8 + (\pi k)/2,\ y = -\pi/8 + (\pi k)/2,\ k \in \mathbb{Z},\ k\text{sudé max},\ k\text{liché min}\ ]$$

P. 3.7. 3659. $u = x - 2y + 2z$, když $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$[\ u_{min} = -3,\ x = -1/3,\ y = 2/3,\ z = -2/3;\ u_{max} = 3,\ x = 1/3,\ y = -2/3,\ z = 2/3\ ]$$

P. 3.8. 3660. $u = x^m y^n z^p$, když $x + y + z = a$ a kde $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$ a $a > 0$.

$$[\ u_{max} = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}, x/m = y/n = z/p = a/(m+n+p)\ ]$$

P. 3.9. 3661. $u = x^2 + y^2 + z^2$, když

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde $a > b > c > 0$.

$$[\ u_{min} = c^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = \pm c;\ u_{max} = a^2,\ x = \pm a,\ y = 0,\ z = 0\ ]$$

P. 3.10. 3662. $u = xy^2z^3$, když $x + 2y + 3z = a$, kde $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ a $a > 0$.

$[\ u_{max} = \big(a/6\big)^6,\ x = y = z = a/6\ ]$

P. 3.11. 3663. $u = xyz$, když $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x + y + z = 0$.

$[\ u_{min} = -1/(3\sqrt{6}),\ x = y = 1/\sqrt{6},\ z = -2/\sqrt{6}$ a $x = z = 1\sqrt{6},\ y = -2/\sqrt{6},$ a $y = z = 1/\sqrt{6},\ x = -2/\sqrt{6};\ u_{max} = 1/(3\sqrt{6}),\ x = y = -1/\sqrt{6},\ z = 2/\sqrt{6}$ a $z = 2/\sqrt{6},\ x = z = -1/\sqrt{6}$ a$y = 2/\sqrt{6},\ y = z = -1/\sqrt{6}$ a $x = 2/\sqrt{6}\ ]$

P. 3.12. 3663.1. $u = xy + yz$, když $x^2 + y^2 = 2$ a $y + z = 2$, kde $x > 0$, $y > 0$ a $z > 0$.

$[\ u_{max} = 2,\ x = z = y = 1\ ]$

P. 3.13. 3664. $u = \sin x \sin y \sin z$, když $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ a kde $x > 0$, $y > 0$ a $z > 0$.

$[\ u_{max} = 1/8,\ x = y = z = \pi/6\ ]$

P. 3.14. 3665.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

když $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = 1$, kde $a > b > c > 0$ a $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$.

$[\ u_{min} = \lambda_1,\ u_{max} = \lambda_2,$ kde $\lambda_{12} - \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda_{12} + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2} + \frac{\cos^2\beta}{a^2c^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right),\ \lambda_1 < \lambda_2\ ]$

P. 3.15. 3666. $u = (x - \xi)^2 + (y - \mu)^2 + (z - \zeta)^2$, když

$$Ax + By + Cz = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
$$\frac{\xi}{\cos\alpha} + \frac{\mu}{\cos\beta} + \frac{\zeta}{\cos\gamma},$$

kde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

$[\ u_{min} = \frac{R^2(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2},\ u_{max} = R^2;\ u_{max} = R^2\ ]$

P. 3.16. 3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ když

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots \frac{x_n}{a_n} = 1,$$

kde $a_i > 0$, $\forall i \in \hat{n}$.

$[\ u_{min} = \big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\big)^{-1},\ x_i = \frac{1}{a_i}\big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\big)^{-1},\ i \in \hat{n}\ ]$

P. 3.17. 3668. $u = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p$ když $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ a $p > 1$, $a > 0$.

$[\ u_{min} = \frac{a^p}{n^{p-1},\ x_i = a/n},\ i \in \hat{n}\ ]$

P. 3.18. 3669.

$$u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}$$

když $\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \ldots + \beta_nx_n = 1$ a $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $x_i > 0\ \forall i \in \hat{n}$.

$[\ u_{min} = \big(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\alpha_j\beta_j}\big)^2,\ x_i = \sqrt{\alpha_i/\beta_i}\big(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\alpha_j\beta_j}\big)^{-1},\ i \in \hat{n}\ ]$

P. 3.19. 3670. $u = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ když $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, kde $a > 0$, $\alpha_i > 1\ \forall i \in \hat{n}$.

$[\ u_{max} = \left(\frac{a}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1}\ldots\alpha_n^{\alpha_n},\ x_i/\alpha_i = x_j/\alpha_j\ ]$

P. 3.20. 3671. Najděte extrém symetrické $(a_{ij} = a_{ji})$ kvadratické formy

$$u = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

na varietě

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

P. 3.21. 3672. Dokažte nerovnost

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \Big(\frac{x+y}{2}\Big)^n,$$

jsou-li $n \geq 1$, $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

NÁPOVĚDA: Zkoumejte minimum funkce $u = 1/2 \cdot (x^n + y^n)$ na varietě $x + y = s$.

P. 3.22. 3673. Dokažte *Hölderovu nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\Big)^{\frac{1}{k}} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\Big)^{\frac{1}{k'}}.$$

NÁPOVĚDA: Zkoumejte minimum funkce

$$u = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\Big)^{1/k} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\Big)^{1/k'}$$

na varietě

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A.$$

P. 3.23. 3674. Dokaže *Hadamardovu nerovnost*

$$det(A)^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\Big).$$

4. Záměna proměnných

Definice 4.1. (Regulární zobrazení) Zobrazení $f : (\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ se nazývá regulární, právě když platí

(i) $(\operatorname{def} f) = (\operatorname{def} f)^{\circ}$,
(ii) $f \in C^{(1)}(\operatorname{def} f)$,
(iii) $(\forall x \in \operatorname{def} f)(f'(x)$ je regulární $)$.

Poznámka 4.1. Regulární zobrazení je lokálně invertovatelné (jsou pro něj splněny požadavky Věty o inverzi 2.1). To znamená, že regulární zobrazení je lokálně prosté,

$$f, f' \in C^{(1)}.$$

Regulární zobrazení je též difeomorfismem.

4.1. **Klasifikace záměn proměnných.** V následujících odstavcích probereme záměny proměnných v obyčejných i parciálních diferenciálních výrazech.

4.2. **Záměna proměnných v obyčejných diferenciálních výrazech.** Nechť $y = y(x)$ je funkce $(y : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R})$. Pod obyčejným diferenciálním výrazem myslíme výrazy typu

$$F = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m)}(x)),\ m \geq 1.$$

Záměnou proměnných přecházíme od starých proměnných x, y k novým t a u.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

Což můžeme vystihnout pomocí zobrazení

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix},$$

kde Ψ je regulární, tedy matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^1}{\partial x} & \frac{\partial \Psi^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi^2}{\partial x} & \frac{\partial \Psi^2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je regulární.

Poznámka 4.2. V záměně popsané výše považujeme staré x a nové t za nezávislé proměnné. Naopak y a u za závislé, a tedy

$$y = y(x),$$
$$u = u(t).$$

Pro přehled všech možností, které probereme, následuje malé schámátko

I. Záměna nezávislých proměnných
   a) Staré pomocí nových
   b) Nové pomocí starých
   c) Implicitně $\Phi(t, x) = 0$
II. Záměna závislých a nezávislých proměnných
   a) Staré pomocí nových
   b) Nové pomocí starých
   c) Implicitně $\Phi(t, u, x, y) = 0$

4.3. **I. Záměna nezávislých proměnných.** Zobrazení Ψ v tomto případě vypadá takto

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^1(x) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}.$$

4.3.1. *I. a) Staré pomocí nových.* Máme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u \end{pmatrix} = \Psi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix},$$
$$x = \varphi(t).$$

φ musí být dostatečně diferencovatelné ($\varphi \in C^{(m)}$) vzhledem k povaze F. Zároveň je Φ regulární, neboť $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Nyní sestavíme tzv. ZÁKLADNÍ IDENTITU, která nám pomůže vyjádřit neznámé. V tomto případě má tvar

$$u(t) = y(\varphi(t)).$$

Tento vztah derivujeme podle t a získáme [2]

$$\dot{u}(t) = y'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \ \Rightarrow \ y'(\varphi(t)) = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)} \dot{u}(t). \tag{4.1}$$

Pokud chceme derivace vyššího řádu, nic nám nebrání derivovat identitu dál.

$$y''(\varphi(t)) = \frac{\dot{u}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^2} - \frac{\dot{u}(t)\ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3} \quad \text{atd.} \tag{4.2}$$

Dále můžeme využít operátorového zápisu. Vyjdeme ze vztahu pro první derivaci (4.2). Operátorově se to dá přepsat následovně

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Rekurzivně zapíšeme derivaci k-tého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\Big).$$

Pro náš případ druhé derivace v rovnici (4.2) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{1}{\dot{\varphi}^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

což souhlasí.

4.3.2. *I. b) Nové pomocí starých.* V tomto případě zaměňujeme

$$t = \alpha(x), \ \alpha \in C^{(m)}, \alpha' \neq \Theta.$$

Sestrojíme základní identitu

$$y(x) = u(\alpha(x)).$$

Odtud snadno dostáváme derivace

$$y'(x) = \dot{u}(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$
$$y''(x) = \ddot{u}(\alpha(x)) \cdot (\alpha'(x))^2 + \dot{u}(\alpha(x)) \cdot \alpha''(x).$$

Operátorové zápisy jsou již patrny z výše uvedených derivací.

---

[2] Pozor! $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4.3.3. *I. c) Implicitně* $\Phi(t,x)=0$. V tomto případě požadujeme $\partial_x\Phi$, $BPt\Phi \neq 0$.
Případ **I. a)** dostaneme volbou $x=\varphi(t)$, pak máme $\Phi(t,\varphi(t))=0$ odkud derivací získáme

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial_t\Phi}{\partial_x\Phi}.$$

Druhou záměnu v **I. b)** dostaneme, pokud $t=\alpha(x)$, a tedy $\Phi(\alpha(x),x)=0$. Odkud již snadno

$$\alpha'(x) = -\frac{\partial_x\Phi}{\partial_t\Phi}.$$

Poznámka 4.3. Celkem jsme převedli $F(x,y,y',\dots)$ na cosi jako $\widetilde{F}(t,u,\dot{u},\dots)$.

Příklad 4.1. *Ve výrazu*

$$F(x,y,y',y'') = x^2y'' + xy' + y,$$

kde $x\in(0,+\infty)$ *a* $y\in C^{(2)}$, *proveďte záměnu* $x=e^t$.

Příklad 4.2. *Proveďte Keplerovu transformaci výrazu*

$$F(x,y,y',y'') = y'' - y'\frac{\epsilon\sin x}{1-\epsilon\cos x} - y(1-\epsilon\cos x)^2,$$

kde $\epsilon\in(0,1)$, $x\in\mathbb{R}$ *a* $y\in C^{(2)}$. *A*

$$t = x - \epsilon\sin x.$$

4.4. **II. Záměna závislých a nezávislých proměnných.**

4.4.1. ***II. a)*** *Staré pomocí nových.* Narozdíl od předešlých případů máme pro záměnu

$$x=\varphi(t,u) \qquad \text{staré: } y=y(x),$$
$$y=\psi(t,u) \qquad \text{nové: } u=u(t).$$

Pro další postup předpokládáme, že $\varphi,\psi\in C^{(n)}$, regulární. Sestrojme základní identitu

$$\psi(t,u) = y(\varphi(t,u)).$$

Naší oblíbenou činností [3] vyjádříme

$$y' = (\partial_t\psi + \partial_u\psi\cdot\dot{u})(\partial_t\varphi + \partial_u\varphi\cdot\dot{u})^{-1}.$$

Další derivací bychom dostali výrazy pro vyšší řády.

4.4.2. ***II. b)*** *Nové pomocí starých.* Nyní platí

$$t=\alpha(x,y), \quad u=\beta(x,y),$$

kde $\alpha,\beta\in C^{(n)}$, regulární. Základní identita

$$\beta(x,y) = u(\alpha(x,y))$$

dává po derivaci podle x

$$y' = \frac{\dot{u}\cdot\partial_x\alpha - \partial_x\beta}{\partial_y\beta - \dot{u}\partial_y\alpha}.$$

[3] Derivováním podle t

4.4.3. ***III. c)*** *Implicitně.*

Příklad 4.3. *V rovnici*

$$(1-x^2)^2y'' = -y$$

proveďte substituci

$$x = \tanh t,$$
$$y = \frac{u}{\cosh t}$$

a uvidíte.

Příklad 4.4. *V Stokesově rovnici*

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$$

proveďte záměnu

$$u = \frac{y}{x-b},$$
$$t = \ln\frac{x-a}{x-b}.$$

4.5. **Záměna proměnných v parciálních diferenciálních výrazech.** Označme

$$z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

a tzv. multiindex

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Jeho délka je rovna

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Parciální derivace jistho řádu se pak dá zapsat jako

$$D_Z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}Z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Parciální difierenciální výraz m-tého řádu je výraz typu

$$F = F(x_1, \ldots, x_n, z, \{D_Z^\alpha\big|\ |\alpha| \geq m\}).$$

V dalším textu se omezíme na funkci dvou proměnných $z = z(x, y)$. Analogicky záměnnám v obyčejných diferenciálních výrazech budeme studovat jisté případy.

4.6. **I. Záměna nezávislých proměnných.**

Poznámka 4.4. Obecná záměna se provadí opět pomocí jistého zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\Psi}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

kde Ψ je regulární.

Nyní v situaci I. platí, že $z = w$.

4.6.1. ***I. a)*** *Staré pomocí nových.* Máme

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$$

a

$$\Psi\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(u,v)\\ \psi(u,v)\\ w\end{pmatrix}.$$

Základní identita má tvar

$$z(\varphi(u,v),\psi(u,v)) = w(u,v).$$

Odtud (po trochu složitějším derivování podle u a v) dostaneme

$$\partial_x z = A(u,v)\partial_u w + B(u,v)\partial_v w,$$
$$\partial_y z = C(u,v)\partial_u w + D(u,v)\partial_v w,$$

nebo operátorově

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_u\\ \partial_v\end{pmatrix}.$$

4.6.2. ***I. b)*** *Nové pomocí starých.* V tomto případě jsou

$$u = \alpha(x,y)$$
$$v = \beta(x,y)$$
$$\Psi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha(x,y)\\ \beta(x,y)\\ z\end{pmatrix}.$$

Napišme si základní identitu

$$z(x,y) = w(\alpha(x,y),\beta(x,y)).$$

Odtud již snadno derivací podle x a y vyjádříme hledané derivace.

4.6.3. ***I. c)*** *Implicitní funkce.*

Příklad 4.5. *Ve výrazu*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

proveďte Galileiho transformaci

$$u = x - ct,$$
$$v = x + ct.$$

Příklad 4.6. *Proveďte záměnu*

$$x = u,$$
$$y = wv,$$

ve výrazu

$$x\partial_x z + y\partial_y z = z.$$

4.7. **II. Záměna nezávislých i závislých proměnných.**

4.7.1. ***II. a)*** *Staré pomocí nových.* Máme

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u,v,w), \\ y &= \psi(u,v,w), \\ z &= \xi(u,v,w). \end{aligned}$$

Zobrazení transformace pak vypadá

$$\Psi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u,v,w) \\ \psi(u,v,w) \\ \xi(u,v,w) \end{pmatrix}.$$

Základní identita v tomto případě

$$z\big(\varphi(u,v,w(u,v)), \psi(u,v,w(u,v))\big) = \xi(u,v,w(u,v))$$

po zderivování podle u a v dává opět hledané vztahy.

4.7.2. ***II. b)*** *Nové pomocí starých.* Máme

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x,y,z), \\ v &= \beta(x,y,z), \\ w &= \gamma(x,y,z). \end{aligned}$$

Zobrazení transformace pak vypadá

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x,y,z) \\ \beta(x,y,z) \\ \gamma(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Základní identita v tomto případě

$$w\big(\alpha(x,y,z(x,y)), \beta(x,y,z(x,y))\big) = \gamma(x,y,z(x,y))$$

po zderivování podle u a v dává opět hledané vztahy.

4.7.3. ***II. c)*** *Implicitní vazba.* ...

Příklad 4.7. *Ve výrazu*

$$(y-z)\partial_x z + (y+z)\partial_y z = 0,$$

proveďte záměnu proměnných

$$\begin{aligned} u &= y - z, \\ v &= y + z, \\ w &= x. \end{aligned}$$

4.8. **Polární transformace.** Polární transformace je transformace typu

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi, \tag{4.3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Zatím můžeme brát

$$\begin{aligned} \rho &\in < 0, +\infty), \\ \varphi &\in < -\pi, \pi), \end{aligned}$$

neboť pak máme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Tyto obory budeme muset omezit, kvůli požadavku regularity zobrazení

$$\Psi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Spočítejme derivaci zobrazení Ψ,

$$\Psi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

A Jakobián (determinant matice Ψ') jest roven

$$\det \Psi' = \boxed{\mathcal{J}_{\text{polární}} = \rho}.$$

Požadavek nenulovosti Jakobiánu transformace a otevřenosti oboru [4] nás omezí na

$$\rho \in (0, +\infty),$$
$$\varphi \in (-\pi, \pi).$$

Můžeme si povšimnout, že vypuštěním těchto hraničních bodů jsme z roviny xy odstranili tzv. Zápornou přímku (záporná část osy x), označme ji P_0. Pak víme, že zobrazení Ψ je regulární jako

$$\Psi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 - P_0.$$

4.8.1. *Náhrada některých diferenciálních výrazů.* V tomto odstavci si spočteme výrazy pro náhradu gradientu ∇ a Laplaciánu $\triangle$. Pro zopakování, v kartézských souřadnicích v $\mathbb{R}^2$ máme

$$\nabla_{xyz} = (\partial_x, \partial_y), \tag{4.4}$$
$$\triangle_{xyz} = \partial_x^2 + \partial_y^2. \tag{4.5}$$

Sestrojme základní identitu

$$z(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = w(\rho, \varphi),$$

z které derivací podle ρ a φ dostaneme následující vyjádření

$$\partial_x z = \cos\varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\sin\varphi}{\rho}\partial_\varphi w, \tag{4.6}$$
$$\partial_y z = \sin\varphi \cdot \partial_\rho w + \frac{\cos\varphi}{\rho}\partial_\varphi w. \tag{4.7}$$

Prostým dosazením do vztahu (4.4) dostaneme gradient v polárních souřadnicích [5]

$$\nabla_{\text{polární}} = \big(\cos\varphi \cdot \partial_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}\partial_\varphi,\ \sin\varphi \cdot \partial_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\partial_\varphi\big).$$

Pro odvození Laplaciánu je potřeba spočítat druhé derivace. to provedeme derivováním vztahů (4.6) a (4.7). Tyto výpočty jsou prostorově náročnější, takže je zde nebudeme vypisovat a je pouze na laskavém čtenáři, aby naše výsledky ověřil. Zjistí, že mnoho členů se dosazením do (4.5) vymlátí. Pak Laplacián v polárních souřadnicích má tvar

$$\triangle_{\text{polární}} = \partial_{\rho\rho}^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} + \partial_{\varphi\varphi}^2 = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2}\partial_{\varphi\varphi}^2. \tag{4.8}$$

4.9. **Cylindrická (válcová) transformace.** Cylindrická transformace má tvar

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$
$$z = \xi.$$

Bez omezení zatím uvažujeme

$$\rho \in < 0, +\infty),$$
$$\varphi \in < -\pi, \pi >$$
$$\xi \in \mathbb{R}.$$

[4] viz. 4.1 a 4.2.

[5] Pozor! Jde o náhradu z kartézských souřadnic!

Zjistíme, kdy je zobrazení Ψ regulární. Máme

$$\Psi\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ \xi\end{pmatrix}.$$

Derivace dává

$$\Psi'\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Jakobián cylindrické transformace

$$\boxed{\mathcal{J}_{\text{cylindr.}}=\rho}.$$

Odtud dostáváme omezení na obory

$$\begin{aligned}&\rho\in\mathbb{R}^+,\\ &\varphi\in(-\pi,\pi)\\ &\xi\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Opět tedy vypouštíme zápornou přímku P_0 (teď je to rovina). Pro výpočet integrálu to nehraje žádnou roli, neboť $\nu(P_0)=0$. Zobrazení Ψ je regulární při

$$\Psi:\mathbb{R}^+\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3-P_0\times\mathbb{R}.$$

4.9.1. *Výpočet některých diferenciálních výrazů.* V tomto případě budeme derivovat základní identitu

$$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,\xi)=w(\rho,\varphi,\xi)$$

podle x, y a z. Pokud si ovšm neuvědomíme, že hledané derivace jsou stejné jako v případě (4.6) a (4.7). Stačí jen spočísti derivaci podle z (derivováním základní identity podle ξ), která je však triviální

$$\partial_z f=\partial_\xi w.$$

Odtud dostáváme gradient v cylindrických souřadnicích

$$\nabla_{\text{cylindr.}}=\big(\cos\varphi\cdot\partial_\rho-\frac{\sin\varphi}{\rho}\partial_\varphi,\ \sin\varphi\cdot\partial_\rho+\frac{\cos\varphi}{\rho}\partial_\varphi,\partial_\xi\big).$$

Stejně tak můžeme využít výsledků (4.8) a dostaneme Laplacián v cylindrických souřadnicích

$$\triangle_{\text{cylindr.}}=\underbrace{\partial^2_{xx}+\partial^2_{yy}}_{\text{známe z polárních souř.}}+\partial^2_{zz}=\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho)+\frac{1}{\rho^2}\partial^2_{\varphi\varphi}+\partial^2_{\xi\xi}.$$

4.10. **Sférická transformace.** Pro sférickou transformaci platí

$$\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi\cos\vartheta,\\ y&=\rho\sin\varphi\cos\vartheta,\\ x&=\rho\sin\vartheta,\end{aligned}$$

při zatím neomezených podmínkách

$$\begin{aligned}&\rho\in<0,+\infty),\\ &\varphi\in<-\pi,\pi>,\\ &\vartheta\in<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}>.\end{aligned}$$

Regularita zobrazení

$$\Psi\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \vartheta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\cos\vartheta\\ \rho\sin\varphi\cos\vartheta\\ \rho\sin\vartheta\end{pmatrix}.$$

Po několika úpravách dostaneme

$$\det\Psi'=\boxed{\mathcal{J}_{\text{sférická}}=\rho\cos\vartheta}.$$

Regularitu tedy máme pro

$$\Psi : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 - P_0 \times \mathbb{R}.$$

4.10.1. *Náhrada některých diferenciálních výrazů.* Základní identita má tvar

$$f = f(\rho \cos\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\vartheta) = w(\rho, \varphi, \vartheta).$$

Derivováním této identity podle ρ, φ a ϑ dostaneme soustavu lineární vzhledem k členům $\partial_x f$, $\partial_y f$ a $\partial_z f$, které hledáme. Tuto soustavu vyřešíme pomocí Cramerova pravidla (viz. [**?**, p. 80, Věta 83.]) a zjistíme, že

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= \cos\vartheta \cos\varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\sin\varphi}{\rho\cos\vartheta}\partial_\varphi w - \frac{\cos\varphi \sin\vartheta}{\rho}\partial_\vartheta w,\\
\partial_y f &= \cos\vartheta \sin\varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\cos\varphi}{\rho\cos\vartheta}\partial_\varphi w - \frac{\sin\varphi \sin\vartheta}{\rho}\partial_\vartheta w,\\
\partial_z f &= \sin\vartheta \cdot \partial_\rho w + \frac{\cos\vartheta}{\rho}\partial_\vartheta w.
\end{aligned}$$

Pak můžeme gradient zapsat jako

$$\nabla_{\text{sférické}} f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f).$$

Laplace...

Poznámka 4.5. Sférickou transformaci můžeme dostat jako složení dvou válcových.

4.11. **Zobecněná sférická transformace.**

Příklad 4.8. *Mějme množinu*

$$M \equiv x^3 + y^3 + z^3 = 1, \quad x, y, z > 0.$$

Proveďte transformaci

$$x = \rho \cos^{2/3}\varphi \cos^{2/3}\vartheta, y \qquad = \rho \sin^{2/3}\varphi \cos^{2/3}\vartheta, z = \rho \sin^{2/3}\vartheta.$$

Příklad 4.9. *Ve výrazu*

$$\partial^2_{xx} z + 2xy^2 \partial_x z + 2(y - y^3)\partial_y z + x^2 y^2 z = 0$$

proveďte záměnu

$$\begin{aligned}
x &= uv,\\
y &= \frac{1}{v},\\
z &= w.
\end{aligned}$$

Příklad 4.10. *Ve výrazu*

$$\partial^2_{xx} z + \partial^2_{yy} z + cz = 0, \quad c > 0$$

proveďte záměnu

$$\begin{aligned}
x &= e^u \cos v,\\
y &= e^u \sin v,\\
z &= w.
\end{aligned}$$

Příklad 4.11. *V **obyčejné** diferenciální rovnici*

$$y'y''' - 3(y'')^2 = x$$

proveďte záměnu

$$t = y, \;\; u = x.$$

4.12. **Příklady - Děmidovič.** V následujících výrazech proveďte zadané záměny.

P. 4.1. 3434. $x^2 + y'' + xy' + y = 0$, když $x = e^t$.

$[\ \ddot{y} + y = 0\ ]$

P. 4.2. 3435. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, když $t = \ln|x|$.

$[\ \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - 6y = 0\ ]$

P. 4.3. 3436. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, když $x = \cos t$.

$[\ \ddot{y} + n^2 y = 0\ ]$

P. 4.4. 3437. $y'' + y' \tanh x + \frac{m^2}{\cosh^2 x} y = 0$, když $x = \ln\tan\frac{t}{2}$.

$[\ \ddot{y} + m^2 y = 0\ ]$

P. 4.5. 3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, když

$$y = u e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

kde $p(x) \in C^1$.

$[\ u'' + \big(q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)\big)u = 0\ ]$

P. 4.6. 3439. $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, když $x = e^t$ a $y = ue^{2t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} + (u+3)\dot{u} + 2u = 0\ ]$

P. 4.7. 3440. $(1+x^2)^2 y'' = y$, když $x = \tan t$ a $y = \frac{u}{\cos t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} = 0\ ]$

P. 4.8. 3441. $(1-x^2)^2 y'' = -y$, když $x = \tanh t$ a $y = \frac{u}{\cosh t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} = 0\ ]$

P. 4.9. 3442. $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$, když $x = u + t$ a $y = u - t$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} + 8u\dot{u}^3 = 0\ ]$

P. 4.10. 3443. $y''' - x^3 y'' + xy' - y = 0$, když $x = \frac{l}{t}$ a $y = \frac{u}{t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ t^5\dddot{u} + (3t^4 + 1)\ddot{u} + \dot{u} = 0\ ]$

P. 4.11. 3444. Proveďte záměnu v *Stokesově* rovnici

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2},$$

pomocí

$$u = \frac{y}{x-b},$$
$$t = \ln\Big|\frac{x-a}{x-b}\Big|,$$

kde $u = u(t)$.

$[\ u'' - u' = \frac{A}{(a-b)^2}u\ ]$

P. 4.12. 3445. Ukažte, že když rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

převedete záměnou $x = \varphi(\xi)$ na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} + P(\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

pak platí, že

$$\big(2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)\big)\big(Q(\xi)\big)^{-3/2} = \big(2p(x)q(x) + q'(x)\big)\big(q(x)\big)^{-3/2}$$

P. 4.13. 3446. Ve výrazu $\Phi(y, y', y'') = 0$, kde Φ je homogenní (adnarodnaja funkcija) funkce y, y', y'', položte

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} u \mathrm{d}x}.$$

[$\Phi(1, u, u' + u^2) = 0$]

P. 4.14. 3447. Ve výrazu $F(x^2 y'', xy', y) = 0$, kde Φ je homogenní funkcí svých argumentů, položte

$$u = x\frac{y'}{y}.$$

[$F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0$]

5. Lebesgueův integrál

Věta 5.1. (Věta o substituci) Buďte

- $G, H \subset \mathbb{R}^n$ otevřené,
- $\varphi : G \to H$ prosté a regulární,
- $M \subset G$ měřitelná, $\varphi(M) \subset \operatorname{def} f$, f měřitelná.

Potom platí (pokud alespoň jedna strana má smysl)

$$\int\limits_{\varphi(M)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{M} f(\varphi(t)) \cdot |\mathcal{J}_\varphi(t)|\mathrm{d}t. \tag{5.9}$$

Věta 5.2. (Věta Fubiniova) Buďte $M \subset \mathbb{R}^{r+s}$, $M \subset \operatorname{def} f$ a nechť $\int_M f$ existuje. Potom

$$\int\limits_M f = \int\limits_{\tilde{M}} \Big(\int\limits_{M_x} f(x,y)\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x, \tag{5.10}$$

kde

$$\tilde{M} = \{x \in \mathbb{R}^r \Big| (x,y) \in M,\ y \in \mathbb{R}^s\},$$
$$M_x = \{y \in \mathbb{R}^s \Big| (x,y) \in M\}.$$

Poznámka 5.1. Smysl předešlého tvrzení spočívá v tom, že dokážeme převést více rozměný Lebesgueův integrál na několik jednorozměrných.

Věta 5.3. (Vztah 1-rozměrného Riemannova a Lebesgueova integrálu)

(i) Existuje-li vlastní Riemannův integrál na intervalu (a,b), pak existuje Lebesgueův integrál a platí
$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) Existuje-li absolutně konvergentní nevlastní Riemannův integrál, pak existuje Lebesgueův integrál a platí rovnost
$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Příklad 5.1. *Proveďte záměnu pořadí integrování*

$$\int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^x \mathrm{d}y f(x,y).$$

Vidíme (pokud si sestrojíme třeba obrázek), že (ve shodě s 5.2) platí

$$M_x = (0,x), \tilde{M} = (0,a).$$

Množina M je v kartézských souřadnicích vyjádřena jako trojúhelník. Dále budeme teď i v nejbližší budoucnosti předpokládat, že f je Lebesgueovsky integrabilní, a tedy $\int_M f$ existuje. Použijeme tedy Fubiniovu větu

$$\int\limits_M f\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^x \mathrm{d}y f(x,y) = \int\limits_{(0,a)} \mathrm{d}x \int\limits_{(0,x)} \mathrm{d}y f(x,y) = \int\limits_{\tilde{\tilde{M}}} \mathrm{d}y \int\limits_{M_y} \mathrm{d}x f(x,y),$$

kde $\tilde{\tilde{M}} = (0,a)$ a $M_y = (y,a)$, takže námi hledaný tvar je

$$\int\limits_0^a \mathrm{d}y \int\limits_y^a \mathrm{d}x f(x,y).$$

Příklad 5.2. *Zaměňte pořadí integrace*

$$\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_x^{2x} f(x,y).$$

Vidíme, že $\tilde{M} = (0,2)$ a $M_x = (x, 2x)$. Z náčrtku je patrno, že $\tilde{\tilde{M}} = (0,4)$ a

$$M_y = \begin{cases} (\frac{y}{2}, y), & y \leq 2 \\ (\frac{y}{2}, 2), & y > 2 \end{cases}$$

Takže

$$\iint\limits_M f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_x^{2x} \mathrm{d}y f(x,y) = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_{y/2}^{y} \mathrm{d}x f(x,y) + \int\limits_2^4 \mathrm{d}y \int\limits_{y/2}^{y} \mathrm{d}x f(x,y).$$

Příklad 5.3. *Zaměňte pořadí integrace ve výrazu*

$$\int\limits_0^{2a} \mathrm{d}x \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} \mathrm{d}y f(x,y),\ \ a > 0.$$

Opět vidíme, že $\tilde{M} = (0, 2a)$, $M_x = (\sqrt{2ax - x^2}, \sqrt{2ax})$. [6] Meze pro záměnu pak jsou následující

$$\tilde{\tilde{M}} = (0, 2a)$$
$$M_y = \begin{cases} \left(\frac{y^2}{2a}, a - \sqrt{a^2 - y^2}\right) \cup (a + \sqrt{a^2 - y^2}, 2a), & y < a \\ (\frac{y^2}{2a}, 2a), & y \geq a \end{cases}$$

Integrál v zadání je tedy roven

$$\int\limits_0^a \mathrm{d}y \left[\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} \mathrm{d}x f(x,y) + \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) \right] + \int\limits_a^{2a} \mathrm{d}y \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} dx f(x,y).$$

Příklad 5.4. *Spočtěte integrál*

$$\int\limits_M y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

kde $M = \{(x,y) \big| x \in (0, 2\pi a),\ y \in (0, \varphi(x))\}$ *kde* $\varphi(x)$ *je zadáno parametricky*

$$x = a(t - \sin t) \tag{5.11}$$
$$y = a(1 - \cos t) \tag{5.12}$$
$$a > 0,\ t \in (0, 2\pi) \tag{5.13}$$

Množina M představuje jeden kopeček cykloidy.

$$\int\limits_0^{2\pi a} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\varphi(x)} \mathrm{d}y \cdot y^2 = \int\limits_0^{2\pi a} \mathrm{d}x \frac{1}{3} \varphi(x)^3$$

nyní použijeme jako substituci (5.11) a dostaneme

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t \frac{1}{3} \big(\underbrace{a(1 - cost)}_{\varphi(x)} \big)^3 \cdot \underbrace{(a - a\cos t)}_{\text{Jakobián}} = \frac{35}{12} \pi a^4.$$

[6] Ve všech těchto typech příkladů je nejlepší si nakreslit obrázek, pokud to jde. Zde jen uvádím takovou kostřičku...

Příklad 5.5. *Spočtěte*

$$\int_M f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \big| x^2 + y^2 \leq a^2\}$ *a použijte vhodnou substituci.*

Pod vhodnou substitucí si v tomto případě představuji polární (4.3) transformaci. Kvůli požadavkům na substituci v integrálu 5.1 budeme integrovat přes novou množinu

$$\tilde{M} = M - (P_0 \cap K),$$

kde P_0 je záporná polopřímka a K je okraj kruhu. To nás ale vůbec nebolí, protože jde o množiny nulové míry. Můžeme psát

$$\int_M f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{\tilde{M}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \overset{\text{VoS}}{=} \int_{(0,a)\times(-\pi,\pi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi \cdot \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\varphi) \overset{\text{F}}{=}$$

$$\overset{\text{F}}{=} \int_{(0,a)} \mathrm{d}\rho\ \rho \int_{(-\pi,\pi)} \mathrm{d}\varphi f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \overset{\text{R}}{=} \int_0^a \mathrm{d}\rho\ \rho \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Zde jsme v každém kroku označili, kterou větu používáme. Konkrétně 5.1, 5.2, 5.3. Ještě si můžeme s výsledkem lehce pohrát a zaměnit pořadí integrovaní, což není v tomto případě těžké, neboť integrujeme na obdélníku. Můžeme tedy dostat (pokračuji z prvního řádku výše)

$$\overset{\text{F}}{=} \int_{(-\pi,\pi)} \mathrm{d}\varphi \int_{(0,a)} \mathrm{d}\rho\ \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \overset{\text{R}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \mathrm{d}\rho\ \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

V dalších příkladech už budeme pokračovat rychleji. V tomto jsme problém rozebrali až do morku kosti.

Příklad 5.6. *Ve výrazu*

$$\int_M f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x^2 + y^2 \leq ax\}$ *proveďte vhodnou substituci.*

Doplněním na čtverce získáme $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$, což představuje kruh s posunutým středem a jistým poloměrem. Za substituci proto zvolíme posunutou polární. To jest

$$x - \frac{a}{2} = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi.$$

Jakobián se zřejmě nezměnil a meze volíme analogicky jako minule. Dostáváme

$$\int_M f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \overset{\text{VoS}}{=} \int_{(0,a/2)\times(-\pi,\pi)} f\Big(\frac{a}{2} + \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\Big)\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\rho \overset{\text{F}}{=}$$

$$\overset{\text{F}}{=} \int_{(0,a/2)} \mathrm{d}\rho\ \rho \int_{(-\pi,\pi)} \mathrm{d}\varphi f(\dots) \overset{\text{F}}{=} \int_{(-\pi,\pi)} \mathrm{d}\varphi \int_{(0,a/2)} \mathrm{d}\rho\ \rho f(\dots).$$

Pokud bychom neodhalili symetrii dané množiny M a použili normální polární substituci (4.3), postupovali bychom následovně. Dosazením do nerovnice obdržíme

$$\rho^2\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big) \leq a\rho\cos\varphi,$$

po úpravě

$$0 \leq \rho \leq a\cos\varphi.$$

Odtud vidíme, že musíme brát $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ a $\rho \in (0, a\cos\varphi)$. Sestavení integrálu je již maličkost.

Příklad 5.7. *Vypočítejte*
$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$
na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x^2+y^2 \leq a^2\}$.

That's easy! Polární substituce:
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, & \rho &\in (0,a),\\ y &= \rho\sin\varphi, & \varphi &\in (-\pi,\pi),\\ \mathcal{J} &= \rho. \end{aligned}$$
A vidíme, že
$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \overset{\text{VoS}}{=} \int_{(0,a)\times(-\pi,\pi)} \rho^2\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\varphi \overset{\text{F}}{=} \ldots \overset{\text{R}}{=} \int_0^a \mathrm{d}\rho\ \rho^2 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

Příklad 5.8. *Vypočítejte*
$$\int_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$
kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$.

Množina M je evidentně mezikruží, použijeme proto polární substituci a ihned můžeme psát
$$? = \int_\pi^{2\pi} \mathrm{d}\rho\ \rho\sin\rho \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = -6\pi^2.$$

Příklad 5.9. *Mějme množinu*
$$S = (a, a+h) \times (b, b+h),\ \ a,b,h > 0$$
a substituci
$$u = \frac{y^2}{x},\ \ v = \sqrt{xy}.$$
Spočtěte míru množiny S a míru množiny, která vznikne po substituci.

Máme transformaci
$$\Phi\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2/x\\ \sqrt{xy}\end{pmatrix}.$$
Chceme tedy spočítat
$$\mu(S) = ?,\ \ \mu(\tilde{S}) = \mu(\Phi(S)) = ?$$
Proto nejprve musíme zjistit, zda-li je transformace Φ korektní, tedy regulární a prostá. Regularitu ověříme výpočtem jakobiánu
$$\mathcal{J}_\Phi = \det\begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}},$$
což při našich parametrech, kterými je zadána S, je nenulový výraz, tedy transformace je regulární.

Prostotu musíme ověřit nalezením inverzního zobrazení. Neboť vyžadujeme globální prostotu, nikoli lokální [7], musíme to zbastlit takhle na koleně. Po chvíli pocení dostaneme
$$y = (uv^2)^{1/3},\ \ x = \left(\frac{v^4}{u}\right)^{\frac{1}{3}}.$$
Nyní ty míry [8]
$$\mu(S) = \int_S \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = h^2$$

[7] viz. 2.1

[8] 90:50:90

a analogicky

$$\mu(\tilde{S}) = \int\limits_{\tilde{S}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \overset{\text{VoS}}{=} \int\limits_{S} \underbrace{\frac{3}{2}\Big(\frac{y}{x}\Big)^{\frac{3}{2}}}_{|\mathcal{J}_\Phi|} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -\frac{6}{5}\Big((a+h)^{-1/2} - a^{-1/2}\Big)\Big((b+h)^{5/2} - b^{5/2}\Big).$$

5.1. **Eulerovy integrály.**

Definice 5.1. (Gamma funkce) Gamma funkce Γ je definována vztahem

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t,\ p > 0.$$

Definice 5.2. (Beta funkce) Beta funkce $\mathcal{B}$ je definována následovně

$$\mathcal{B}(p,q) = \int\limits_0^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1} \mathrm{d}t,\ p,q > 0.$$

Poznámka 5.2. Některé užitečné vlastnosti Gama funkce:

(1) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$,
(2) $\Gamma(p+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$,
(3) $\Gamma(n+1) = n!$,
(4) $\Gamma(1) = 1$.

Poznámka 5.3. A vlastnosti Beta funkce:

$$\mathcal{B}(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} \mathrm{d}t = \int\limits_0^{1} \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\mathcal{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},\ p \in (0,1).$$

Příklad 5.10. *Ukážeme souvislost jistého notoricky známého integrálu s Beta funkcí a to*

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\ \mathrm{d}x,\ m,n > -1.$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\ \mathrm{d}x = \Big| \textit{subst. } t = \sin x \Big| = \int\limits_0^{1} t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}t = \Big| \textit{subst. } u = t^2 \Big| = \tag{5.14}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} u^{\frac{m-1}{2}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathcal{B}\Big(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big). \tag{5.15}$$

Příklad 5.11. *Spočtěte integrál*

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leq 1} (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Příklad 5.12. *Vyčíslete integrál*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\ \mathrm{d}x,\ m \neq n.$$

Příklad 5.13. *Vyjádřete*

$$\iint_\Omega f(x,y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y,$$

kde Ω *je oblas vymezená křivkami* $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$ *a* $4x = y$.

Příklad 5.14. *Vypočtěte plochu ohraničenou křivkami*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$
$$x^2 + y^2 \geq a^2.$$

Příklad 5.15. *Spočtěte objem útvaru*

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{n}\left(\frac{-\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\right).$$

Příklad 5.16. *Mějme*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \big| Q(x) \leq 1\},$$

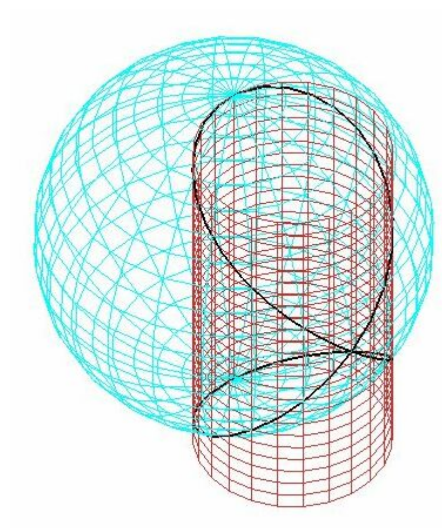
kde Q *je pozitivně definitní kvadratická forma. Vypočtěte míru množiny* M.

Příklad 5.17. *Vypočtěte objem prostoru ohraničeného plochami*

$$z = x^2 + y^2,$$
$$z = x + y.$$

Příklad 5.18. *Vypočítejte objem omezený těmito plochami (*Vivianiho *těleso) :*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$x^2 + y^2 = ax.$$



Obrázek 1. Vivianiho těleso

Příklad 5.19. *Spočtěte objem* n*-simplexu v* $\mathbb{R}^n$. *Tedy*

$$M = [x_0, x_1, \dots, x_n]_\kappa,\; x_j \in \mathbb{R}^n,\; \forall j \in \hat{n},$$

$$\nu(M) = ?$$

Příklad 5.20. *Vypočtěte Eulerův integrál*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = I.$$

Tento integrál není lehké spočíst, neboť primitivní funkce existuje pouze ve formě řady, ani nemůžeme použít funkční posloupnost $f_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^n$, protože stejnoměrná konvergence $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} e^{-x^2}$ platí pouze pro omezenou A. [9]

Zkoumejme integrál podobného tvaru, zdánlivě složitější, a proveďme jednoduché úpravy.

$$\tilde{I} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \overset{\mathrm{F}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\ \mathrm{d}y = I^2.$$

Dále také můžeme provést v $\tilde{I}$ polární substituci (4.3). Obdržíme

$$\tilde{I} \overset{\mathrm{R}}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\rho \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\rho^2}\rho\ \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}\ \mathrm{d}\rho = \pi.$$

Shrneme-li výsledky, vidíme, že

$$\tilde{I} = \pi = I^2 \ \Rightarrow\ I = \sqrt{\pi}.$$

5.2. **Příklady z Děmidoviče.** V následujících integrálech zaměňte pořádek integrace.

P. 5.1. 3924.

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$[\ \int_0^2\ \mathrm{d}y \int_{y/2}^{y} f(x,y)\ \mathrm{d}x + \int_2^4\ \mathrm{d}y \int_{y/2}^{2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

P. 5.2. 3925.

$$\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$[\ \int_{-1}^0\ \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\ \mathrm{d}x + \int_0^8\ \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

P. 5.3. 3926.

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$[\ \int_0^1\ \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{y^{1/3}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

P. 5.4. 3927.

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$[\ \int_{-1}^0\ \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x + \int_0^1\ \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

P. 5.5. 3928.

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$[\ \int_0^1\ \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

[9] Nejsme tedy schopni zaměnit limitu a integrál.

P. 5.6. 3929.

$$\int\limits_0^{2a} \mathrm{d}x \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\ \mathrm{d}y,\ a>0$$

$$[\ \int_0^a\ \mathrm{d}y \left[\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\right] + \int_a^{2a}\ \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

P. 5.7. 3930.

$$\int\limits_1^{e} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$[\ \int_0^1\ \mathrm{d}y \int_{e^y}^{e} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

P. 5.8. 3931.

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

$$[\ \int_0^1\ \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\ \mathrm{d}x - \int_{-1}^{0}\ \mathrm{d}y \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ ]$$

P. 5.9. 3932. Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

jestliže oblast Ω je ohraničena křivkami $y^2 = 2px$ a $x = \frac{p}{2}$, kde $p > 0$.

$$[\ \frac{p^5}{21}\ ]$$

P. 5.10. 3933. Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}},\ a>0,$$

když oblast Ω je ohraničena kružnicí se středem v (a,a) a poloměrem a.[10]

$$[\ (2\sqrt{2} - 8/3)a\sqrt{a}\ ]$$

5.3. **Parametrické integrály.** Začneme příkladem.

Příklad 5.21. *Určete*

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{\alpha} x\ \mathrm{d}x,\ |\alpha| < 1.$$

Evidentně

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha} x \cos^{-\alpha} x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathcal{B}(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1-\alpha}{2}) = \frac{\pi}{2\sin\pi(\frac{\alpha+1}{2})}.$$

Příklad 5.22. *Následující integrál sice není parametrickým, ale naučí nás, že za vším musíme vidět* Γ *a* $\mathcal{B}$ *funkce, se kterými se pracuje daleko lépe, než kdybychom použili naše staré konvenční zbraně.*

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x,$$

$$I = \mathcal{B}\Big(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\Big) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

[10] Asi tak nějak, moc neumim rusky...

Příklad 5.23. *A ještě jeden podobného ražení*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$$

Proveďme substituci $t = x^3$ a obdržíme

$$\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\mathcal{B}\Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.3.1. *Teoretická vsuvka - Operace s parametrickými integrály.*

Věta 5.4. (O limitě a parametrickém integrálu) Můžeme zaměnit limitu a integrál

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_M f(x,\alpha)\ \mathrm{d}x = \int_M \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\ \mathrm{d}x,$$

platí-li následující předpoklady

(i) $f(\cdot,\alpha) \in \mathcal{M}(M),\ \forall\alpha \in A,$ [11]
(ii) $(S\forall x \in M)(\exists \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha))$,
(iii) Existuje integrabilní majoranta, tj. $(S\forall x \in M)(\forall\alpha \in A)(|f(x,\alpha)| \le g(x))$, kde $g \in L(M)$. [12]

Věta 5.5. (O spojitosti a parametrickém integrálu) Podobně jako v předešlé větě, můžeme za analogických předpokladů tvrdit, že

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_M f(x,\alpha)\ \mathrm{d}x = \int_M f(x,\alpha_0)\ \mathrm{d}x.$$

Věta 5.6. (O derivaci a parametrickém integrálu) Nechť $A = (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$. Potom můžeme zaměnit integraci a derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int_M f(x,\alpha)\ \mathrm{d}x\right)\Bigg|_{\alpha=\alpha_0} = \int_M \partial_\alpha f(x,\alpha_0)\ \mathrm{d}x,$$

platí-li následující podmínky

(i) $(\exists\alpha_0 \in A)(f(\cdot,\alpha_0) \in L(M))$,
(ii) $(S\forall x \in M)(\forall\alpha \in A)(\exists\partial_\alpha f(x,\alpha))$,
(iii) $(\forall\alpha \in A)(f(\cdots,\alpha) \in \mathcal{M}(M))$,
(iv) Existuje integrabilní majoranta, tj. $(S\forall x \in M)(\forall\alpha \in A)(|\partial_\alpha f(x,\alpha)| \le g(x))$, kde $g \in L(M)$.

Příklad 5.24. *Spočtěte*

$$I(A) = \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\Big)\cdot\frac{1}{\cos x}\ \mathrm{d}x,\ \ |a|<1.$$

Označme si pro přehlednost integrand jako $f(x,a)$. Jeho derivací podle parametru získáme

$$\partial_a f(x,a) = \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}.$$

Při našich podmínkách $M = (0,\frac{\pi}{2})$, $|a|<1$ s můžeme při derivování omezit na $A = (a_0-\epsilon, a_0+\epsilon)$, kde $\bar{A} \subset (-1,1)$. Nyní vidíme, že

$$\frac{2}{1-a^2\cos^2 x} \le \frac{2}{1-\max\{(a_0-\epsilon)^2,\ (a_0+\epsilon)^2\}\cos^2 x}.$$

Ostatní body věty 5.6 vyplývají ze spojitosti f.

[11] Symbolem $\mathcal{M}(M)$ označujeme množinu všech měřitelných funkcí na M.
[12] Symbolem $L(M)$ označujeme množinu všech integrabilních funkcí (s konečným integrálem) na M.

Pokračujme ve výpočtu

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}},$$

kde jsme použili substituci $t = \operatorname{tg} x$. A teď stači už jen spočíst I:

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} = \pi \arcsin a + C,$$

kde ze znalosti $I(0) = 0$ vyplývá, že $C = 0$.

Příklad 5.25. *Vypočtěte*

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a)^{n+1}}, \ n \in \mathbb{N}, a > 0.$$

Co jiného, než derivování integrandu by nás mohlo napadnou...

$$\partial_a f(n, x, a) = -(n + 1) \cdot (x^2 + a)^{-n-2}.$$

Vezmeme-li $A = (a_0 - \epsilon, a_0 + \epsilon)$ pak můžeme tvrdit, že

$$|\partial_a f(n, x, a)| \leq \frac{n + 1}{x^2 + a_0 - \epsilon}.$$

Proto máme

$$I_n'(a) = -(n + 1) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a)^{n+2}} = -(n + 1) I_{n+1}(a).$$ [13]

Snadno nahlédneme, že

$$I_0(a) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},$$

a dále

$$I_n(a) = -\frac{I_{n-1}'(a)}{n} = \frac{(2n - 1)!!}{n!} \frac{\pi}{2^{n+1}} a.$$

Příklad 5.26. *Vypočtěte*

$$I(\alpha) = \int_0^1 \ln(1 - \alpha^2 x^2) \cdots \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x, \ |\alpha| \leq 1.$$

Příklad 5.27. *Určete*

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x) \cdot \operatorname{arctg}(\beta x)}{x^2} \, \mathrm{d}x, \ \alpha, \beta > 0.$$

Označme integrand symbolem $f(x, \alpha, \beta)$. Zřejmě je f spojitá, tedy měřitelná vzhledem k x. Spočítejme si

$$\partial_\alpha f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{x} \frac{\operatorname{arctg} \beta x}{1 + (\alpha x)^2}.$$

Snadno nahlédneme, že

$$|\partial_\alpha f| \leq \frac{\mathcal{K}}{1 + x^2(\alpha_0 - \epsilon)^2},$$

kde $\mathcal{K}$ je konstanta omezující podíl arcustangens a x a $\alpha \in (\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon)$. Kdybychom nyní zkusili vypočíst původní $I(\alpha, \beta)$,

$$\partial_\alpha I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \beta x}{x(1 + \alpha^2 x^2)} \, \mathrm{d}x. \tag{5.16}$$

[13] Kozubova diferenciálně diferenční rovnice s nekonstantními koeficienty alias KDDRNK.

zjistili bychom, že to není tak snadne. Vidíme ale, že můžeme derivovat dál, neboť máme další parametrický integrál (5.16). Obdržíme

$$\partial^2_{\beta\alpha} f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\big(1+(\alpha x)^2\big)\big(1+(\beta x)^2\big)}.$$

Tento výraz v absolutní hodnotě můžeme omezit stejným způsobem jako v případě α. Dostali jsme tedy integrál

$$\partial^2_{\beta\alpha} I(\alpha\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)},$$

který již snadno spočítáme rozkladem na parciální zlomky a postupně získáme

$$\partial_\alpha I(\alpha\beta) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\beta) - \frac{\pi}{2}\ln\alpha.$$

Odkud opět integrací dostaneme již konečný výsledek

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\ln\Big(\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}\Big).$$

Příklad 5.28. *Vypočítejte*

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\ \mathrm{d}x\ \ a>0.$$

Příklad 5.29. *Vypočtěte*

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\ \mathrm{d}x,\ \ a>0, b\in\mathbb{R}.$$

Příklad 5.30. *Vypočtěte*

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\ \mathrm{d}x$$

5.4. **Křivkový integrál 1. a 2. druhu.**

5.4.1. *Konstrukce křivkového integrálu 1. druhu.* Mějme funkci $f: C\to\mathbb{R}$, kde C je křivka v $\mathbb{R}^n$, tj.

$$(\exists\psi :<\alpha,\beta>\to\mathbb{R}^n)(\psi \text{ je spojitá a } \psi(<a,b>)=C).$$

Tuto křivku rozdělíme na dílky. V l-tém úseku délky Δl vybereme reprezentanta x_l. Provedeme součet přes všechny dílky

$$\sum f(x_l)\Delta l.$$

Pokud tento pro všechna zjemnění rozdělení a libovolné reprezentatny jde ke stejné hodnotě, pak tuto hodnotu nazveme křivkovým integrálem 1. druhu a značíme

$$\int\limits_C f(x)\mathrm{d}l.$$

Pro výpočet použijeme vhodnou parametrizaci φ křivky C, evidentně integrál nezávisí na volbě parametrizace. Máme tedy

$$\int\limits_C f(x)\mathrm{d}l = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\underbrace{||\dot\varphi(t)||}_{\text{Euklidovská norma}}\mathrm{d}t.$$

5.4.2. *Konstrukce křivkového integrálu 2. druhu.* Křivková integrál 2. druhu se od křivkového integrálu 1. druhu liší tím, že uvažuje i orientaci křivky. Buď proto $\vec{C}$ orientovaná křivka, tj.

$$(\exists \psi : C \to \mathbb{R})(C = \psi(< a, b >)), \text{a navíc}$$
$$(\exists o :< a, b >\to \mathbb{R}^n),$$

kde $o(t)$ je tečný vektor v bodě $\psi(t)$ a o se nazývá orientace. Dále je zadáno tenzorové pole 2. řádu

$$F : C \to \mathbb{R}^n.$$

Křivku opět rozdělíme na malé úseky a v každém vybereme reprezentanta x_l, definujeme

$$\vec{\Delta_l} = \Delta_l \cdot o(x_l),$$

kde Δ_l je délka l-tého úseku v němž je také x_l. Nyní sestrojíme součet

$$\sum F(x_l) \cdot \vec{\Delta_l}.$$

Pokud pro všechna zjemnění a libovolnou volbu reprezentantů jde tento součet vždy ke stejnému číslu řekneme, že existuje křivkový integrál 2. druhu a značíme

$$\int_C F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_C F^1(x)\mathrm{d}x^1 + \ldots + F^n(x)\mathrm{d}x^n.$$

Pro výpočet opět zavedem parametrizaci φ a platí

$$\int_C F(x)\mathrm{d}\vec{l} = \pm \int_\alpha^\beta F(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t$$

kde znaménko $\pm$ určuje v jakém směru integrujeme. Shoduje-li se směr $\dot{\varphi}$ a o pak platí plus, v opačném případě minus.

Příklad 5.31. *Vypočítejte křivkový integrál 1. druhu*

$$I = \int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l,$$

kde křivka L je dána následovně

$$L \equiv x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a > 0.$$

Použijeme zobecněnou sférickou transformaci

$$x(t) = \rho(t)\cos^3 t,$$
$$y(t) = \rho(t)\sin^3 t.$$

Potom ze zadání křivky dostáváme

$$\rho(t) = a.$$

Dále máme parametrizaci

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix},\ t \in (-\pi, \pi)$$

a

$$||\dot{\Psi}||^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t.$$

Původní integrál v zadání převedeme na tvar

$$\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l = \int_{-\pi}^{\pi} (a^{4/3}cos^4 t + a^{4/3}sin^4 t) \cdot 3a|\sin t| \cdot |\cos t|\mathrm{d}t.$$

Vzhledem k periodicitě integrandu se omezemíme na $(0, \frac{\pi}{2})$, čímž se zbavíme absolutních hodnot a přidáme 4.

$$I = 4 \cdot 3a^{7/3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t\mathrm{d}t.$$

Snadno nahlédneme, že

$$I = 12a^{7/3}\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(4)} = 4a^{7/3}.$$

Příklad 5.32. *Spočtěte integrál*

$$I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}l,$$

kde

$$L \equiv (x^2 + y^2)^{3/2} = a^2(x^2 - y^2).$$

Příklad 5.33. *Vypočtěte*

$$\int_C y^2 \mathrm{d}l,$$

kde C je oblouk cykloidy s parametrizací

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix},\ t \in (0, 2\pi)$$

Příklad 5.34. *Spočtěte integrál*

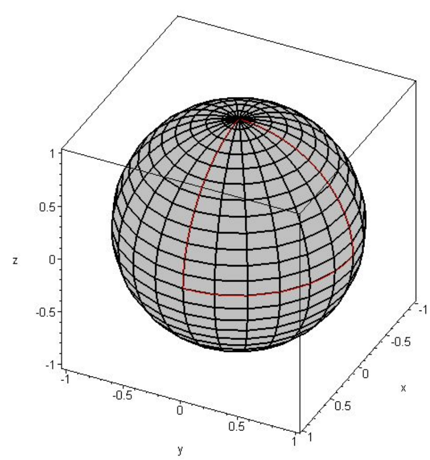
$$\int_{AB} (2xy\ \mathrm{d}x + x^2\ \mathrm{d}y),$$

kde AB je křivka v $\mathbb{R}^2$, zadaná dále, spojující body $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$. Uvažujte přímku, parabolu a lomenou čáru jdoucí po ose x a pak kolmo nahoru k bodu A.

Příklad 5.35. *Spočtěte křivkový integrál v $\mathbb{R}^3$*

$$\int_L (y^2 - z^2)\ \mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\ \mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z,$$

kde L je křivka vzniknuvší průnikem kulové plochy s poloměrem 1 a středem v počátku s rovinami x, y, x, z a y, z v kladném kvadrantu. Názorný nákres je na obrázku 5.4.2



Obrázek 2. Křivka L

5.5. Greenova formule.

Věta 5.7. (Green) Buď C uzavřená, kladně orientovaná [14] křivka, $D = \operatorname{Int} C$, $F, G \in C^1$ na H_D. Potom

$$\int\limits_C F \; \mathrm{d}x + G \; \mathrm{d}y = \int\limits_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right). \tag{5.17}$$

Příklad 5.36. *Pomocí Greenovy formule určete*

$$\int\limits_L (e^x \sin y - py) \; \mathrm{d}x + (e^y \cos y - p) \; \mathrm{d}y,$$

kde křivka L je půlkružnice se středem v bodě $(a/2, 0)$ a poloměrem a.

Příklad 5.37. *Spočtěte integrál*

$$I = \int\limits_L \frac{x \; \mathrm{d}y - y \; \mathrm{d}x}{x^2 + y^2},$$

kde L je libovolná po částech spojitá, uzavřená křivka omotávající počátek s orientací proti hodinovým ručičkám.

5.6. Plošné integrály.

5.6.1. *Plošný integrál 1. druhu.* Náš problém spočívá v ploše $S \subset \mathbb{R}^3$, na které je definováno $f : S \to \mathbb{R}$. Myšlenka je asi taková, že plochu rozsekáme na malé kousíčky ΔS, ve kterých vybereme reprezentanta x_0 a zkoumáme

$$\sum f(x_0) \Delta S.$$

Pokud tyto součtu při různých zjemnění jdou ke stejnému číslu, nazveme ho plošný integrál 1. druhu a značíme

$$\int\limits_S f(x) \mathrm{d}S.$$

Tento integrál opět počítáme pomocí parametrizace $\varphi : M \to S$, $M \subset \mathbb{R}^2$, pak totiž

$$\int\limits_S f(x) \mathrm{d}S = \int\limits_M f(\varphi(u, v)) \cdot ||\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi|| \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

5.6.2. *Plošný integrál 2. druhu.* Analogicky jako u křivkového 2. druhu zde uvažujeme nyní orientaci plochy. Hned na začátek poznamenáme, že ne každá plocha má orientaci. Například Möbiův proužek a Leidenská láhev. Mějme opět plochu $S \subset \mathbb{R}^3$, tentokrát orientovanou, tzn. pro každý bod $x \in S$ je definována její normála $\vec{o}(x)$. Dále máme nějaké vektorové pole $F : S \to \mathbb{R}^3$.

Plochu rozsekáme na elementy ΔS a v každém vybereme bod x_0, dostaneme

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \cdot \vec{o}(x_0)$$

a sestrojíme součet

$$\sum F(x_0) \cdot \Delta \vec{S},$$

kde suma jde přes všechny elementy ΔS. Pokud konverguje ke stejnému číslu pro libovolné zjemnění, pak ono číslo nazýváme plošným integrálem 2. druhu a značíme

$$\int\limits_S F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

nebo pomocí diferenciální 2-formy

$$\int\limits_S F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_S F^1(x, y, z) \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z + F^2(x, y, z) \; \mathrm{d}z \; \mathrm{d}x + F^3(x, y, z) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y.$$

[14]...něco jako proti směru hodinových ručiček

Pro výpočet můžeme použít parametrizaci φ stejně jako v předešlých případech

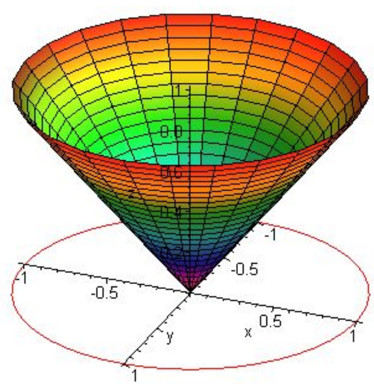
$$\int_S F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pm \int_M F(\varphi(u,v)) \cdot (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi) \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

kde kladné znaménko volíme při stejné orientaci $\vec{o}$ a vektorového součinu derivací parametrizace, v opačném případě volíme minus.

Příklad 5.38. *Vypočtěte povrch koule o poloměru $a > 0$.*

Příklad 5.39. *Vypočtěte povrch pláště kužele o výšce 1,*

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2, \ a > 0.$$



Obrázek 3. Kužel s průmětem

Příklad 5.40. *Spočtěte povrch Vivianiho tělesa.*

Příklad 5.41. *Určete*

$$I = \int_M \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^4}{c^4}} \mathrm{d}S,$$

kde

$$M \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ a, b, c > 0.$$

Příklad 5.42. *Spočtěte*

$$I = \int_M (x^2 + y^2) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y,$$

kde

$$M \equiv x^2 + y^2 \leq R^2, \ z = 0, \ \vec{o} = (0, 0, -1)$$

je kruh v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 5.43. *Vypočítejte*

$$I = \int_M x \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}z + y \ \mathrm{d}z \ \mathrm{d}x + z \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y,$$

kde M je koule se středem v počátku a poloměrem a, orientovaná vně.

5.7. **Stokesovy věty.**

Věta 5.8. (Greenova věta) Ta sem též patří, viz (5.17). Jen pro úplnost

$$\int_{\partial A} F\ \mathrm{d}x + G\ \mathrm{d}y = \int_A \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

kde A je plocha v $\mathbb{R}^2$ a ∂A je její hranice, tedy křivka, orientovaná proti směru hodinových ručiček a $F, G \in C^1(H_A)$.

Věta 5.9. (Klasická Stokesova věta)

$$\int_{\partial B} (F\ \mathrm{d}x + G\ \mathrm{d}y + H\ \mathrm{d}z) = \int_B \operatorname{rot}\begin{pmatrix}F\\G\\H\end{pmatrix}\cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{5.18}$$

Věta 5.10. (Gaussova-Ostrogradského věta)

$$\int_{\partial A} (F\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + G\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x + H\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y) = \int_A \operatorname{div}\begin{pmatrix}F\\G\\H\end{pmatrix}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z, \tag{5.19}$$

kde A je nějaká nedegenerovaná podmnožina $\mathbb{R}^3$ a její hranice ∂A je orientovaná vně.

Příklad 5.44. *Tentýž příklad jako výše, jiným způsobem.*

$$\int_M (x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y),$$

kde $M \equiv x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *je orientovaná vně.*

Máme vektorové pole

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ F, M \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^3).$$

Vidíme, že

$$\operatorname{div} F = 3,$$

a použijeme-li Gaussovu větu (5.19) dostaneme

$$\int_{B(0,a)} 3\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = 4\pi a^3.$$

Příklad 5.45. *Spočtěte plochu elipsy*

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hledáme tedy

$$\mu(E) = \int_E 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Zvolme vektorové pole následovně

$$F(x,y) = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix},\ F \in C^{(\infty)}.$$

Pak

$$\mu(E) = \int_E 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{\partial E} (F^1\ \mathrm{d}x + F^2\ \mathrm{d}y) = \int_E \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 2\mu(E).$$

Dále zvolme transformaci

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix}a\cos t\\b\sin t\end{pmatrix},\ t \in (-\pi,\pi).$$

Provedem substituci

$$\mu(E) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial E} F^1 \ \mathrm{d}x + F^2 \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2} ab \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = \pi ab.$$

Příklad 5.46. *Najděte*

$$\int\limits_C (x^2 - yz) \ \mathrm{d}x + (y^2 - xz) \ \mathrm{d}y + (z^2 - xy) \ \mathrm{d}z,$$

kde křivka C je tzv. šroubovice daná parametrizací

$$C: \ \varphi(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a \sin t \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix}, \ t \in < -\pi, \pi > .$$

6. Funkce komplexní proměnné

Poznámka 6.1. Bude se nám hodit Eulerova formule

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Poznámka 6.2.

Příklad 6.1. *Ukázka komplexního logaritmu:*

$$\ln(\sqrt{3} + i) = \ln_0(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i \arg_0(\sqrt{3} + i).$$

Snadno nahlédneme, že

$$\arg_0(\sqrt{3} + i) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

A

$$\ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{6}.$$

Poznámka 6.3. Některé elementární funkce komplexní proměnné:

- polynomy: $\sum_{i=0}^{p} x_i z^i$,
- exponenciála: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,
- sinus: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,
- cosinus: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

Příklad 6.2. *Řešte*

$$\cos z = 2,$$

v $\mathbb{C}$.

Poznámka 6.4. O diferencovatelnosti $f(z)$. Problém můžeme formulovat následovně

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},\ z = x + iy,$$

$$f(x) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Platí tzv. Riemann-Cauchyho podmínky :
$f'(z_0)$ existuje, právě když platí

(i)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

(ii)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

A dále platí, že

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0, y_0).$$

Příklad 6.3. *Má následující funkce derivaci?*

$$f(z) = y + ix$$

Příklad 6.4. *Má funkce*

$$f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

derivaci?

6.1. **Křivkový integrál v $\mathbb{C}$.**

Poznámka 6.5. Křivkový integrál 1. druhu (málo používaný)

$$\int_C f(z)|\,\mathrm{d}z| = \int_C u(x,y)\mathrm{d}l + i\int_C v(x,y)\mathrm{d}l,$$

zřejmě

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Křivkový integrál 2. druhu (C je orientovaná)

$$\int_v f(z)\ \mathrm{d}z = \int_C (u(x,y)\ \mathrm{d}x - v(x,y)\ \mathrm{d}y) + i\int_C (v(x,y)\ \mathrm{d}x + u(x,y)\ \mathrm{d}x).$$

Opět definován pomocí reálného křivkového integrálu 2. druhu.

Definice 6.1. (Holomorfní funkce) Funkce f je na $A \subset \mathbb{C}$ holomorfní právě když $(\forall z \in A)(f'(z)$ existuje).

Věta 6.1. (Cauchyho integrální věta) f je holomorfní na $A \subset \mathbb{C}$, $A = A^{\mathrm{o}}$, $C \subset A$ křivka se stopou v A právě když integrál

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$$

nezávisí na cestě integrace.

Poznámka 6.6. Je-li C uzavřená a f holomorfní pak $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.

Poznámka 6.7. (Newtonova formule) Nechť f je holomrofní na A, $z_0, z_1 \in A$ pak

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\ \mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0),$$

kde $F'(z) = f(z)$.

Příklad 6.5. *Výpočet křivkového integrálu $\int_C z\ \mathrm{d}z$, kde $C:\ \varphi(t) = t + 2it$, $t \in <0, 1>$.*

máme

$$u(x,y) = x, v(x,y) = -y,$$

$$\varphi_R e(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix},\ \dot{\varphi_R} e(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Takže náš integrál

$$I = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + i\int_0^1 \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 5t\mathrm{d}t + i\int_0^1 0\mathrm{d}t = \frac{5}{2}.$$

Příklad 6.6. *Spočtěte integrál*

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z,\ f(z) = y + 1 - ix,$$

pomocí Newtonovy formule.

Vidíme, že

$$f(z) = 1 - iz,$$

a primitivní funkce

$$F(z) = C + z - \frac{i}{2}z^2.$$

Newtonova formule 6.7 nám pak dává

$$I = F(-i) - F(1) = -1.$$

Příklad 6.7. *Spočtěte integrál*

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a}, \ a \in \mathbb{C},$$

kde C je uzavřená, kladně orientovaná, po částech hladká křivka a $a \notin [C]$.

Vidíme, že

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

je holomorfní na $A \subset \mathbb{C}$, $a \notin A$.

Rozebereme dva případy, které mohou nastat.

1) $a \in \operatorname{Ext} C$: Tedy a je vně C, pak je f na A holomorfní a

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0.$$

2) $a \in \operatorname{Int} C$: Nenajdeme vhodnou A, kde bychom mohli použít Cauchyho integrální větu 6.1.

Poznámka 6.8. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

má primitivní funkci

$$\ln_\Theta(z-a)$$

na libovolné množině A takové, že $P_\Theta\text{not} \subset A$ (záporná polopřímka).

Dále k příkladu...